k-ORESME SAYILARI

BİTİRME ÇALIŞMASI

Çiğdem Zeynep YILMAZ - 18025056

Doç. Dr. Nurten GÜRSES

ÖZET

Bu bitirme çalışmasında

- Fibonacci, Lucas ve Horadam sayılarının Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, rekürans bağıntıları, bazı özellikleri, "altın oran" terimi ve tavşan problemi,
- Fibonacci ve Lucas sayılarının bir genelleştirmesi olan k-Fibonacci ve k-Lucas sayılarının, k-Horadam sayılarının özellikleri,
- Oresme sayılarının tarihçesi ve önemli özellikleri,
- k-Oresme sayıları ve özellikleri ile Oresme sayılarının bir diğer genelleştirilmesine ait temel özellik ve özdeşlikler

ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sayı Dizisi, Oresme Sayıları, k-Oresme Sayıları

FİBONACCİ SAYILARI

Fibonacci sayı dizisi matematikçiler için en ilgi çekici sayı dizilerinden birisidir. Fibonacci sayıları hakkında sayısız çalışma yapılmıştır. 1963 yılında "***The Fibonacci Quaterly***" isminde bir Fibonacci dergisinin kurulması Fibonacci sayılarına olan yoğun ilginin bir göstergesidir.

Fibonacci'nin klasik kitabı Liber Abaci birçok problem içermektedir. Bunlardan biri ise ünlü tavşan problemidir. Problem aşağıdaki gibidir:

Varsayalım ki biri erkek biri dişi iki adet yeni tavşan doğmuş olsun.

1. ***Her tavşan çiftinin olgunlaşma süresi bir aydır.***
2. ***Her tavşan çifti ikinci aydan itibaren her ay yeni bir tavşan çifti yavrulamaktadır.***
3. ***Bir yıl boyunca hiçbir tavşan ölmez.***

koşuları altında bir yıl sonunda kaç tavşan olacağını bulunuz.

Kolaylık sağlaması açısından ilk tavşan çiftinin 1 Ocak'ta doğduğu kabul edilsin. Tavşanların olgunlaşması bir ay süreceği için 1 Şubat' ta hala sadece bir çift tavşan vardır. Bu şekilde devam edildiğinde, 1 Nisan'da toplam üç çift, 1 Mayıs'ta beş çift tavşan var olacaktır.

Aylar	Yetişkin Tavşan	Bebek Tavşan	Toplam Tavşan
Ocak	0	1	1
Şubat	1	0	1
Mart	1	1	2
Nisan	2	1	3
Mayıs	3	2	5
Haziran	5	3	8
Temmuz	8	5	13
Ağustos	13	8	21
Eylül	21	13	34
Ekim	34	21	55
Kasım	55	34	89
Aralık	89	55	144

Fibonacci sayı dizisindeki her sayı kendisinden bir önceki sayıya bölündüğünde $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ oranının bir limite (1.618033…) ulaştığı gözlemlenebilir. Bu irrasyonel sayı Fibonacci'den yüzyıllar önce antik Yunanlılar tarafından bilinmekte olup ***altın oran*** olarak isimlendirilmiştir. Yunanlılardan önce antik Mısırlılar altın oranı piramitlerin yapımında kullanmışlardır. Doğada birçok yerde altın orana rastlamak mümkündür.

1

2

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 1$$
$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, n. Fibonacci sayısını veren bağıntı:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

LUCAS SAYILARI

Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısı farklı başlangıç değerleri ile kullanılırsa Fibonacci sayı dizisine oldukça benzeyen Lucas sayı dizisi elde edilir.

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, n \geq 1$$
$$L_0 = 2, L_1 = 1$$

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, n. Lucas sayısını veren bağıntı:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

$$F_{n+r} + F_{n-r} = \begin{cases} F_n L_r, & r = 2k \\ F_r L_n, & r = 2k+1 \end{cases}$$

$$L_{n+r} + L_{n-r} = \begin{cases} L_n L_r, & r = 2k \\ 5F_n F_r, & r = 2k+1 \end{cases}$$

$$L_n^2 - L_{n-k}L_{n+k} = 5(-1)^{n-k+1}F_k^2$$

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1}F_n = (-1)^n F_{m-n}$$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

HORADAM SAYILARI

$p, q, n, a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$w_{n+2} = pw_{n+1} - qw_n, \ n \geq 0$$
$$w_0 = a, w_1 = b$$

Horadam sayı dizisinin karakteristik denklemi $x^2 - px + q = 0$ şeklindedir. Bu denklemin kökleri $\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$, $\beta = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ve $A = \frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}$, $B = \frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}$ olmak üzere Binet formülü:

$$w_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

a	b	p	q	Sembol	Dizi
0	1	p	q	u_n	Fundamental Lucas
2	b	b	q	v_n	Primordial Lucas
0	1	1	−1	F_n	Fibonacci
2	1	1	−1	L_n	Lucas
0	1	2	−1	P_n	Pell

k-FİBONACCİ SAYILARI

Her pozitif k tam sayısı için,

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, n \geq 1$$
$$F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$$

k-Fibonacci sayı dizisinin karakteristik denklemi $r^2 - kr - 1 = 0$ olup, bu denklemin kökleri $r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}, r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ şeklindedir. Binet formülü:

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$

k-LUCAS SAYILARI

Her pozitif k tam sayısı için,

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1}, n \geq 1$$
$$L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k$$

k-Lucas sayı dizisinin karakteristik denklemi $r^2 - kr - 1 = 0$ olup, bu denklemin kökleri $r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}, r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ şeklindedir. Binet formülü:

$$L_{k,n} = r_1^n + r_2^n$$

k-HORADAM SAYILARI

k pozitif bir reel sayı ve $f(k), g(k)$ skaler değerli polinomlar olsun.

$n \geq 0$ ve $f(k)^2 + 4g(k) > 0$ olmak üzere,

$$H_{k,n+2} = f(k)H_{k,n+1} + g(k)H_{k,n}, H_{k,0} = a, H_{k,1} = b$$

Yanda verilen rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - f(k)x - g(k) = 0$ olup, bu denklemin iki reel kökü $r_{1,2} = \frac{f(k) \pm \sqrt{f(k)^2 + 4g(k)}}{2}$ şeklindedir. $X = b - ar_2, Y = b - ar_1$ olmak üzere, Binet formülü:

$$H_{k,n} = \frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2}$$

ORESME SAYILARI

On dördüncü yüzyılın ortalarında filozof, bilgin Nicole Oresme rasyonel sayıların toplamı üzerine çalışmıştır ancak ne yazık ki Oresme' nin orijinal çalışmaları yayınlanamamıştır.

A.F. Horadam, Oresme sayılarının Horadam sayı dizisinin özel bir durumu olduğunu ifade etmiştir:

$$\{O_n\} = \left\{w_n\left(0, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$O_{n+2} = O_{n+1} - \frac{1}{4}O_n, n \geq 0$$
$$O_0 = 0, O_1 = \frac{1}{2}$$

$$O_n = n2^{-n}, n \in \mathbb{Z}$$

Cassini Özdeşliği	$O_{n-1}O_{n+1} - O_n^2 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$
Catalan Özdeşliği	$O_{n-r}O_{n+r} - O_n^2 = -\frac{r^2}{2^{2n}}$
D'Ocagne Özdeşliği	$O_{m+1}O_n - O_mO_{n+1} = -\frac{(m-n)}{2^{m+n+1}}$

k-ORESME SAYILARI

Genel olarak k-Oresme sayıları ve p-Oresme sayıları aynı başlangıç koşullarına sahip olup, k-Oresme sayıları $k \geq 3$ için tanımlanırken, p-Oresme sayıları ise $0 \neq p \in \mathbb{R}$ için tanımlanmıştır. Böylece $p = 2$ olduğunda Oresme sayı dizisi elde edilmektedir.

k-Oresme Sayıları:

$$O_{k,n+2} = O_{k,n+1} - \frac{1}{k^2}O_{k,n}, k \geq 3$$
$$O_{k,0} = 0, O_{k,1} = \frac{1}{k}$$

$$O_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{k^2-4}}\left\{\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n\right\}$$

$$O_{k,n+1}O_{k,n-1} - O_{k,n}^2 = -\left(\frac{1}{k^2}\right)^n$$

$$O_{k,n+2} - \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)O_{k,n} + \frac{1}{k^2}O_{k,n-1} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} O_{k,j} = k^2\left(\frac{1}{k} - O_{k,n+1}\right)$$

p-Oresme Sayıları:

$0 \neq p \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{Q}_{n+2} = \mathcal{Q}_{n+1} - \frac{1}{p^2}\mathcal{Q}_n, n \geq 0$$
$$\mathcal{Q}_0 = 0, \mathcal{Q}_1 = \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{Q}_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n p^n \sqrt{p^2-4}}\left[\left(p+\sqrt{p^2-4}\right)^n - \left(p-\sqrt{p^2-4}\right)^n\right], & p^2 \neq 4 \\ \frac{n}{2^{n-1}p}, & p^2 = 4 \end{cases}$$

KAYNAKÇA

1. Yüce, S. (2020). Sayılar ve geometri. *Pegem Akademi*.
2. Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas numbers with applications. *John Wiley & Sons*.
3. Horadam, A. F. (1965a). Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. *The Fibonacci Quaterley*, 3(3), 161-176.
4. Falcon, S., (2011). On the k-Lucas numbers. *Int J. Contemp. Math. Sciences*, 6(21), 1039-1050.
5. Yazlık, Y., & Necati, T. (2012). A note generalized k-horadam sequence. *Computers and Mathematics with Applications,* 63(1), 36-41.
6. Horadam, A.F. (1974). Oresme Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* 12(3), 267-271.
7. Soykan, Y. (2021b) A study on generalized p-oresme numbers. *Asian Journal of Advanced Research and Reports*, 15(7), 1-25.
8. Cook, C. K. (2004). Some sums related to sums of oresme numbers. *Proceedings of the Tenth International Research Conference on Fibonacci Numbers and their Applications, Kluwer Academic Publishers,* 9, 87-99.

Resim 1: *https://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_pyramids*, Resim 2: *https://www.researchgate.net/figure/The-Golden-Ratio-in-nature_fig21_303587913*